חוברת סיכום קורס

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – קורס ראשון

תוכן עניינים

הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס www.Studies.co.il.

נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

איך לעבוד נכון עם חוברת סיכום קורס?

1) יש הבדל מהותי בין סיכום **שלכם** לבין סיכום של **מישהו אחר** – סיכום שלנו תמיד נקלט הרבה יותר טוב בראש שלנו מאשר סיכום של מישהו אחר, ולכן כדי שהסיכום הזה יקלט טוב, אני מציע לכם בחום לעבוד לפי עקרון מוביל אחד וחשוב: **להפוך את הסיכום הזה – לשלכם.**

אז איך עושים את זה? באופן הבא:

מדגישים, מקיפים, ממרקרים, $\boxed{\text{ממלבנים}}$, כותבים הערות קטנות בצד וכד'.

זה אומר באופן מפורש ש- $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

וגם כותבים ממש על גבי הנוסחאות עצמן כמו למשל כך: $\left|f(x)-L\right| < \varepsilon$

ובקיצור עושים כל מה שצריך כדי להפוך את הסיכום הזה לשלכם.

2) אחד המפתחות להצלחה בקורס הזה הוא: **לשנן, לשנן ואז עוד קצת לשנן.** לפעמים שואלים אותי – חן, מה אנחנו בשיעור היסטוריה? מה לשנן, זו מתמטיקה! אז אני תמיד עונה: "המתמטיקה בנויה על שלוש רגליים – **הבנה, תרגול ושינון"** (ולא ניתן להתחמק מהרגל השלישית!).

בקורס אנחנו עובדים על שני החלקים הראשונים: הבנה ותרגול.

שינון – זה עליכם. והחוברת הזאת נועדה בדיוק בשביל זה. השינון נועד לתת לכם רצף מחשבתי כדי שתוכלו לנסח דרך פתרון קוהרנטית טבעית ורציפה ללא צורך לעבור דרך חיפוש נוסחה כזאת או אחרת בדף הנוסחאות. משננים ואז הכל נמצא בראש שלנו ויכול להישלף מהזיכרון בקלות בשעת מבחן.

תעבדו לפי עקרונות אלו ובעזרת ה' תראו הצלחה.

בהצלחה!

פונקציות

תכונות והגדרות יסוד

הגדרת הפונקציה

נתונות שתי קבוצות D,E. פונקציה היא כלל המתאים לכל איבר מ- D איבר יחיד מ- E.

סימון: $f:D\to E$ או $D\xrightarrow{f}E$

פונקציה מונוטונית

f מונוטונית עולה אם לכל $x_1,x_2\in D$, $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)\ge f(x_1)$

פונקציה חסומה

f חסומה אם קיים מספר M כך שלכל $x\in D$, $|f(x)|\le M$

פונקציה זוגית ואי-זוגית

f נקראת זוגית אם לכל $x\in D$: $f(-x)=f(x)$

f נקראת אי-זוגית אם לכל $x\in D$: $f(-x)=-f(x)$

פונקציה מחזורית

f נקראת מחזורית אם לכל $x\in D$ קיים T כך ש- $f(x+T)=f(x)$

<u>פונקציה חד-חד-ערכית</u>

f נקראת חח"ע אם לכל $x_1, x_2 \in D$: $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1)$

או באופן שקול אם: $f(x_2) = f(x_1)_1 \Rightarrow x_2 = x_1$

<u>במילים</u>: f נקראת <u>חד-חד-ערכית</u> אם לכל ערך y יש <u>לכל היותר</u> ערך אחד של x.

<u>משפט</u>: f מונוטונית עולה ממש $\Leftarrow$ f חח"ע

<u>פונקציה על</u>

תהי f פונקציה בתחום D וטווח E.

הפונקציה נקראת **על** אם <u>לכל</u> $y \in E$ קיים $x \in D$ כך ש- $f(x) = y$.

<u>במילים</u>: f נקראת <u>על</u> אם לכל ערך y יש <u>לכל הפחות</u> ערך אחד של x.

<u>פונקציה הפיכה</u>

תהי פונקציה $f : D \to E$.

f נקראת פונקציה הפיכה אם קיימת פונקציה $g : E \to D$

כך שלכל $x \in D$: $g(f(x)) = x$

ולכל $y \in E$: $f(g(y)) = y$

g נקראת פונקציה הפוכה ל- f ומסומנת על-ידי: $g = f^{-1}$

<u>משפט</u>: f הפיכה $\Leftrightarrow$ f חח"ע ועל

גבולות

הגדרת הגבול

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. המספר L נקרא הגבול של $f\left(x\right)$ כאשר x שואף ל- x_0 אם לכל מספר $\varepsilon>0$ קיים מספר $\delta>0$ כך שלכל x ששונה מ- x_0 ($x\neq x_0$) ושייך לתחום $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ מתקיים ש- $f\left(x\right)$ שייכת לתחום $L-\varepsilon<f\left(x\right)<L+\varepsilon$.

הגדרות הגבול השונות

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$: $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f\left(x\right)=L$ $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$, קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$: $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=L$ $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$, קיים x_0 כך שלכל $x<x_0$: $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $M>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$: $f\left(x\right)>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=-\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $m<0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$: $f\left(x\right)<m$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f\left(x\right)=\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $M>0$, קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$: $f\left(x\right)>M$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $M>0$, קיים x_0 כך שלכל $x<x_0$: $f\left(x\right)>M$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f\left(x\right)=-\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $m<0$, קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$: $f\left(x\right)<m$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=-\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $m<0$, קיים x_0 כך שלכל $x<x_0$: $f\left(x\right)<m$.

משפט הסנדביץ'

אם בסביבת הנקודה x_0 מתקיים $g(x) \le f(x) \le h(x)$ לכל x השייך לסביבה זו, ואם בנוסף

מתקיים ש- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, אזי גם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

גבולות חד-צדדיים

גבול מימין בנקודה

לפונקציה $f(x)$ יש גבול L_1 **מצד ימין** כאשר x מתקרב ל- x_0,

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $x_0 < x < x_0 + \delta$ אזי $\left|f(x) - L_1\right| < \varepsilon$.

במקרה זה נסמן: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_1$.

גבול משמאל בנקודה

לפונקציה $f(x)$ יש גבול L_2 **מצד שמאל** כאשר x מתקרב ל- x_0,

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $x_0 - \delta < x < x_0$ אזי $\left|f(x) - L_2\right| < \varepsilon$.

במקרה זה נסמן: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_2$.

משפט – גבולות חד-צדדיים

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

כלומר, הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים זה לזה אמ"מ קיים גבול ב- x_0

(והגבול הוא אותו הגבול: $L_1 = L_2 = L$).

אריתמטיקה

<u>אריתמטיקה של גבולות</u>

אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים: $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ אזי:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=L_1+L_2$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=L_1-L_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=L_1\cdot L_2$$

אם גם $L_2\neq 0$ אזי:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

<u>היינה – הקשר בין סדרות לפונקציות</u>

<u>משפט היינה</u>

ל- f יש גבול ב- x_0 אם <u>לכל</u> סדרה x_n ששואפת ל- x_0 ($x_n\neq x_0$) מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

<u>מסקנה – שלילת גבול של פונקציה</u>

אם קיימות שתי סדרות שונות x_n, $\overline{x}_n$, ששואפות ל- x_0, אבל $f(x_n)$ ו- $f(\overline{x}_n)$ שואפות לגבולות שונים, אזי ל- f לא קיים גבול ב- x_0.

<u>רציפות</u>

<u>הגדרת הרציפות</u>

תהי f מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. f נקראת רציפה ב- x_0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אזי: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, כלומר מתקיים:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

<u>הערה:</u> $f(x)$ <u>לא מוגדרת</u> ב- x_0 גורר ש- $f(x)$ <u>לא רציפה</u> ב- x_0.

<u>רציפות מימין לנקודה</u>

פונקציה f המוגדרת מימין ל- x_0 נקראת <u>רציפה מימין</u> ב- x_0 אם: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

<u>רציפות משמאל לנקודה</u>

פונקציה f המוגדרת משמאל ל- x_0 נקראת <u>רציפה משמאל</u> ב- x_0 אם: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

<u>משפט הרציפות</u>

f רציפה ב- x_0 $\Leftrightarrow$ f רציפה גם מימין וגם משמאל ב- x_0.

<u>מיון נקודות אי-רציפות</u>

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה נקובה של x_0, נאמר כי x_0 היא נקודת אי-רציפות מסוג:

<u>סליקה</u> – אם:

א) הגבול קיים ב- x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ (<u>משני</u> הצדדים).

ב) אבל הגבול שונה מערך הפונקציה בנקודה - $L\neq f\left(x_0\right)$, או שהפונקציה בכלל <u>לא מוגדרת</u> ב- x_0.

<u>דוגמא</u>

$x\neq 0$, $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{x}$ – הגבול קיים ב- $x_0=0$ (זהו הגבול המפורסם: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$),

אבל f כלל לא מוגדרת ב- $x_0=0$.

שימו-לב שנק' אי-רציפות סליקה תמיד ניתנת לתיקון ע"י הגדרה שם, למשל:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & , \ x\neq 0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$$

<u>קפיצה</u>

אם שני הגבולות החד"צ: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=L^+$ ו- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=L^-$ <u>קיימים</u> <u>וסופיים</u>, אבל $L^+\neq L^-$.

<u>דוגמא</u>

פונקציית הערך השלם $f\left(x\right)=\left[x\right]$ בכל מספר שלם $x_0=k$.

<u>עיקרית</u>

אם ב- x_0 <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד-צדדיים <u>לא קיים</u> או <u>לא סופי</u>.

<u>דוגמאות</u>

$f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ - הגבול לא קיים ב- $x_0=0$.

$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ - הגבולות החד-צדדיים אינסופיים סביב $x_0=0$.

משפטי רציפות יסודיים

משפט ערך הביניים

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $\left[a,b\right]$.

אם $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי קיימת נקודה $x_0\in\left(a,b\right)$ כך ש- $f\left(x_0\right)=0$.

משפט ערך הביניים המוכלל

תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$. אם y_0 היא נקודת ביניים בין $f\left(a\right)$ ל- $f\left(b\right)$, כלומר: $f\left(a\right)<y_0<f\left(b\right)$ (או $f\left(b\right)<y_0<f\left(a\right)$), אזי קיימת נקודה $x_0\in\left(a,b\right)$ כך ש- $f\left(x_0\right)=y_0$

משפט ויירשטראס

תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$, אזי:

א) $f\left(x\right)$ חסומה בקטע.

ב) $f\left(x\right)$ מקבלת את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר שלה בקטע (זאת אומרת קיימות שתי נקודות $x_1,x_2\in\left[a,b\right]$ כך שלכל $x\in\left[a,b\right]$: $f\left(x_1\right)\le f\left(x\right)\le f\left(x_2\right)$).

<u>גזירות</u>

<u>הגדרת הגזירות</u>

תהי $f(x)$ מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. $f(x)$ נקראת **גזירה** בנקודה x_0 אם הגבול הבא <u>קיים וסופי</u>:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

בהצבת $h=x-x_0$ מתקבלת הגדרה שקולה לנגזרת:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

<u>משפט – גזירות גוררת רציפות</u>

אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 אזי היא רציפה ב- x_0 (גזירות גוררת רציפות אך לא להיפך!).

<u>כלל השרשרת</u>

אם $g(x)$ גזירה בנקודה x_0 ו- $f(g)$ גזירה ב- $g(x_0)$ אזי הפונקציה המורכבת $f(g(x))$ גזירה ב- x_0 ומתקיים כלל השרשרת:

$$\boxed{\left[f(g(x))\right]'\Big|_{x=x_0}=f'(g(x_0))g'(x_0)}$$

או בצורת הצגה דיפרנציאלית:

$$\boxed{\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}}$$

נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי f פונקציה מונוטונית עולה (יורדת) ממש ורציפה ב- $[a,b]$. תהי f^{-1} הפונקציה ההפוכה של f,

אם f' קיימת ב- x_0, $a<x_0<b$ ו- $f'(x_0)\neq 0$ אזי f^{-1} גזירה ב- $y_0=f(x_0)$ ומתקיים:

$$\boxed{\left[f^{-1}(y_0)\right]'=\frac{1}{f'(x_0)}}$$

נגזרות חד-צדדיות

נגזרת ימנית

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה x_0.

$f(x)$ נקראת **גזירה מימין** ל- x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)}$$

נגזרת שמאלית

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה x_0.

$f(x)$ נקראת **גזירה משמאל** ל- x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)}$$

משפט – שיוויון נגזרות חד-צדדיות

פונקציה $f(x)$ גזירה ב- x_0 אמ"מ יש לה נגזרות מימין ומשמאל ב- x_0 והן שוות זו לזו.

במקרה זה יתקיים השוויון:

$$\boxed{f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)}$$

כללי גזירה

יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x_0, אזי:

1) נגזרת של סכום: $\left[f(x)+g(x)\right]'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$

2) נגזרת של הפרש: $\left[f(x)-g(x)\right]'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)-g'(x_0)$

3) נגזרת של מכפלה: $\left[f(x)g(x)\right]'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$

4) נגזרת של הפונקציה ההופכית:

אם גם $f(x_0)\neq 0$ אזי:

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'\Bigg|_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

4) נגזרת של מנה:

אם גם $g(x_0)\neq 0$ אזי:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'\Bigg|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות

$$\left[\arcsin x\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\arccos x\right]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\arctan x\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\operatorname{arccot} x\right]' = -\frac{1}{1+x^2}$$

<u>כלל לופיטל</u>

<u>משפט לופיטל (ניסוח עבור מקרה "0/0")</u>

תהיינה f ו- g מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של x_0 ומקיימת את התנאים הבאים:

א) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

ב) $g'(x) \neq 0$ בסביבה.

ג) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה ל- L.

אזי גם הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל- L.

<u>הערות</u>

א) המשפט לעיל מנוסח עבור המקרה בו $\frac{f}{g} \sim \frac{0}{0}$ בסביבת x_0.

ב) המשפט נשאר נכון גם עבור המקרים בהם $\frac{f}{g} \sim \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (כל האפשרויות בין הסימנים) בסביבת x_0.

ג) המשפט נכון בין אם x_0 סופי או $\pm\infty$.

ד) המשפט נכון גם עבור גבול חד-צדדי.

משפטים יסודיים

משפט פרמה

תהי f מוגדרת בקטע פתוח (a,b) ותהי $x_0 \in (a,b)$. אם f גזירה ב- x_0 ואם היא מקבלת בנקודה זו את ערכה הגדול ביותר (או הקטן ביותר) בקטע אזי $\boxed{f'(x_0)=0}$.

משפט דרבו

אם f גזירה בקטע סגור $[a,b]$, אזי $f'(x)$ מקבלת לפחות פעם אחת כל ערך ביניים שבין $f_+'(a)$ ל- $f_-'(b)$.

משפט רול

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם בנוסף $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $\boxed{f'(c)=0}$.

משפט לגרנז'

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b), אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

משפט קושי (הכללה ללגרנז')

תהיינה $f(x),g(x)$ רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b) ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x \in (a,b)$. אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$

<u>הערה</u>: בהצבת $g(x)=x$ מתקבל משפט לגרנז'.

טור טיילור

משפט נוסחת טיילור

תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0 ותהי x נקודה כלשהי בסביבה זו.

אזי קיימת נקודה c בין x ל- x_0 כך ש-

$$\boxed{f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)}+R_n(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=T_n(x)+R_n(x)}$$

כאשר $R_n(x)$ נתונה ע"י נוסחת השארית של לגרנז':

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

מקרה פרטי n=0 – משפט לגרנז'

אם ניקח את $n=0$ בפיתוח:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)}+\underbrace{\frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)}_{R_0(x)}$$

ובהעברת אגפים מתקבל משפט לגרנז':

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

משפט יחידות הטור

אם לפונקציה יש פיתוח לטור טיילור אזי הוא נקבע ביחידות.

טור טיילור – מקלורן

טור טיילור מפותח סביב הנקודה $x_0 = 0$ נקרא טור מקלורן:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)}$$

פיתוחים סטנדרטיים לטור מקלורן

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , D = (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad , D = (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad , D = (-\infty, \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \qquad , D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad , D = [-1, 1]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad , D = (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad , D = (-1, 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

$$\textit{for any real number } m \ , D = (-1, 1)$$

זוגיות טור מקלורן

כאשר מפתחים את $f(x)$ לטור מקלורן,

אם $f(x)$ פונקציה **זוגית**, אזי כל המקדמים האי-זוגיים מתאפסים, כלומר תופענה רק חזקות זוגיות.

דוגמא:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots$$

ואם $f(x)$ פונקציה **אי-זוגית**, אזי כל המקדמים הזוגיים מתאפסים, כלומר תופענה רק חזקות א"ז.

דוגמא:
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$$

חקירת פונקציה

נקודות קיצון מקומיות

נקודת מקסימום מקומית

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. x_0 נקראת נקודת מקסימום מקומית של $f\left(x\right)$ אם קיימת סביבה של x_0 כך ש- $f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)$ לכל x השייך לסביבה.

נקודת מינימום מקומית

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. x_0 נקראת נקודת מינימום מקומית של $f\left(x\right)$ אם קיימת סביבה של x_0 כך ש- $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$ לכל x השייך לסביבה.

משפט – התאפסות הנגזרת בנקודת קיצון מקומית

אם נקודה x_0 היא נקודת קיצון מקומית (מקס' או מינ') ו- $f\left(x\right)$ גזירה ב- x_0 אזי: $f'\left(x_0\right)=0$.

הערה: אם $f'\left(x_0\right)=0$ לא ניתן להסיק על נקודת קיצון (כלומר המשפט ההפוך לא בהכרח נכון).

נקודת קיצון גלובלית

נקודת מקסימום גלובלית

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה בקטע מסוים. x_0 נקראת נקודת מקסימום גלובלית של $f\left(x\right)$ אם לכל x בקטע מתקיים: $f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)$. כלומר $f\left(x_0\right)$ הוא הערך הגדול ביותר של הפונקציה בקטע.

נקודת מינימום גלובלית

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה בקטע מסוים. x_0 נקראת נקודת מינימום גלובלית של $f\left(x\right)$ אם לכל x בקטע מתקיים: $f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)$. כלומר $f\left(x_0\right)$ הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה בקטע.

תנאים לנקודת קיצון

נקודה חשודה לקיצון (מקסימום או מינימום מקומי)

נאמר שנקודה x_0 חשודה לקיצון אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

א) $f'(x_0)=0$

ב) $f(x)$ מוגדרת ב- x_0 אבל $f'(x_0)$ לא קיימת

למשל: $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, אזי $x_0=0$ חשודה לקיצון לפי ב'.

משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת הראשונה

תהי $f(x)$ <u>רציפה בנקודה</u> x_0 <u>וגזירה בסביבת</u> x_0 פרט אולי ב- x_0 עצמה. אזי:

א) אם $f'(x)>0$ לכל $x<x_0$ ו- $f'(x)<0$ לכל $x>x_0$ אזי x_0 נקודת מקסימום מקומית.

ב) אם $f'(x)<0$ לכל $x<x_0$ ו- $f'(x)>0$ לכל $x>x_0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומית.

ג) אם $f'(x)$ שומרת סימן ב- x_0 אזי x_0 <u>לא</u> נקודת קיצון מקומית של $f(x)$.

משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת השנייה

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0 וגם $f'(x_0)=0$, אזי:

א) אם $f''(x_0)<0$ אזי ב- x_0 יש מקסימום מקומי.

ב) אם $f''(x_0)>0$ אזי ב- x_0 יש מינימום מקומי.

משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת ה- n-ית

תהי $f(x)$ בעלת נגזרות רציפות עד סדר n בנקודה x_0 .

אם: $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ אבל $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ ו- n <u>זוגי</u> אזי יש קיצון.

אם $f^{(n)}(x_0)<0$ יש מקסימום ואם $f^{(n)}(x_0)>0$ יש מינימום.

אם n <u>אי-זוגי</u> אזי אין קיצון. אם $n=2$ מתקבל המשפט הקודם כמקרה פרטי.

תחומי קמירות וקעירות

קמירות

הפונקציה $f(x)$ נקראת **קמורה** בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של x_0 כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מעל המשיק ב- x_0, כלומר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים:

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ נקראת קמורה בקטע כלשהו אם היא קמורה בכל נקודה בקטע.

קעירות

הפונקציה $f(x)$ נקראת **קעורה** בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של x_0 כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מתחת למשיק ב- x_0, כלומר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים:

$$f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ נקראת קעורה בקטע כלשהו אם היא קעורה בכל נקודה בקטע.

מבחן הנגזרת השנייה לקמירות וקעירות

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים ב- (a,b) אזי:

א) אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$ אזי $f(x)$ קמורה ב- (a,b).

ב) אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (a,b)$ אזי $f(x)$ קעורה ב- (a,b).

נקודת פיתול

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה x_0. נאמר ש- x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$ אם יש בנקודה מעבר בין תחום קמירות של הפונקציה לתחום קעירות שלה.

הערה: אם $f(x)$ גזירה פעמיים ו- $f''(x)$ משנה סימן ב- x_0 אזי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$ ובהכרח $f''(x_0) = 0$. אך ההגדרה המקורית הינה גיאומטרית, כלומר $f(x)$ לא חייבת להיות מוגדרת או רציפה או גזירה בנקודה!

אסימפטוטות

הגדרה – אסימפטוטה משופעת

אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-ax-b\right)=0$ אזי הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה של f ב- ∞.

אם $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-ax-b\right)=0$ אזי הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה של f ב- $-\infty$.

<u>הערה</u>: בפרט אם $a=0$ מתקבלת אסימפטוטה אופקית (מקבילה לציר ה- x).

<u>נוסחאות לחישוב הישר</u>: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}\ ,\ b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$

אם הגבולות לעיל קיימים אזי הישר $y=ax+b$ הינו אסימפטוטה של f ב- ∞ (אם אחד מהם אינסופי או לא קיים אזי האסימפטוטה לא קיימת)

הגדרה – אסימפטוטה אנכית

אם $\lim\limits_{x\to a^+}\left|f\left(x\right)\right|=\infty$ נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה $\left(a,0\right)$ אסימפטוטה אנכית מימין של f ב- a.

אם $\lim\limits_{x\to a^-}\left|f\left(x\right)\right|=\infty$ נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה $\left(a,0\right)$ אסימפטוטה אנכית משמאל של f ב- a.

ל- f יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=a$ אם f לא מוגדרת ב- a ולפחות אחד משני הגבולות הבאים הוא אינסופי: $\lim\limits_{x\to a^-}f\left(x\right)=\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)=\infty$

סדרות

הגדרות יסוד בסדרות

סדרה

אוסף אינסופי מסודר של מספרים ממשיים נקרא סדרה. סימון: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, או בקצרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

גבול של סדרה

נאמר שהמספר L הוא גבול הסדרה, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

סימון: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ או בקצרה: $a_n \to L$.

הגדרה שקולה

L הוא גבול הסדרה אם לכל $\varepsilon > 0$ הקטע הפתוח $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ מכיל **כמעט** את כל איברי הסדרה.

שלילת הגדרת הגבול

L הוא לא הגבול של הסדרה, אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל n_0 קיים $n > n_0$ כך שמתקיים: $|a_n - L| \ge \varepsilon$.

שלילת הגדרת הגבול השקולה

L הוא לא הגבול של הסדרה, אם קיים $\varepsilon > 0$, כך שיש אינסוף איברים מחוץ לקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

כלל אצבע לשלילה: לכל $\leftrightarrow$ קיים.

גבול אינסופי

נאמר כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף, אם לכל מספר M קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$: $a_n > M$.

סימון: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, או בקצרה: $a_n \to \infty$.

נאמר כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אינסוף, אם לכל מספר m קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$: $a_n < m$.

סימון: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, או בקצרה: $a_n \to -\infty$.

הגדרות שקולות

סדרה a_n שואפת ל- ∞ אם יש איזשהו מספר M, כך **שכמעט** כל איברי הסדרה גדולים ממנו.

סדרה a_n שואפת ל- $-\infty$ אם יש איזשהו מספר m, כך **שכמעט** כל איברי הסדרה קטנים ממנו.

מבוא לתורת הקבוצות

קבוצה חסומה

תהי A קבוצה של מספרים ממשיים ($A \in \mathbb{R}$). יהי x איבר ב- A ($x \in A$), אזי:

A חסומה מלמעלה אם קיים M כך שלכל $x \in A$: $x \le M$.

A חסומה מלטה אם קיים m כך שלכל $x \in A$: $x \ge M$.

A חסומה אם קיים K כך שלכל $x \in A$: $|x| \le K$.

או באופן שקול: A חסומה אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

סופרמום ואינפימום

תהי $A \in \mathbb{R}$, אזי:

S נקרא סופרמום של A אם הוא החסם מלמעלה הכי קטן של A (הדוק מלמעלה). סימון: $\sup A$.

I נקרא אינפימום של A אם הוא החסם מלטה הכי גדול של A (הדוק מלמטה). סימון: $\inf A$.

מקסימום ומינימום

תהי $A \in \mathbb{R}$ ויהיו $S = \sup A$, $I = \inf A$, אזי:

אם $S \in A$ אזי הוא נקרא המקסימום של A. סימון: $\max A$.

אם $I \in A$ אזי הוא נקרא המינימום של A. סימון: $\min A$.

אקסיומת השלמות

לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמעלה – קיים סופרמום.

($\Leftrightarrow$ לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה – קיים אינפימום)

משפט הסופרמום

$S = \sup A$ אם ורק אם:

א) לכל $x \in A$, $x \le S$.

ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש- $x_0 > S - \varepsilon$.

סדרות רקורסיביות

סדרה רקורסיבית

סדרה שבה כל איבר מוגדר על-ידי האיברים שקודמים לו.

הנוסחה המתקבלת נקראת נוסחת נסיגה וביחד עם תנאי ההתחלה, מוגדרת הסדרה כולה.

שלבי האינדוקציה

כדי להוכיח טענה באמצעות אינדוקציה, עובדים לפי השלבים הבאים:

א) בדיקה: בודקים שהטענה נכונה עבור $n=1$.

ב) הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה עבור n מסוים.

ג) הוכחה: מוכיחים שהטענה נכונה עבור $n+1$.

תתי-סדרות

תת-סדרה

סדרה המתקבלת מ- a_n על-ידי השמטת חלק מאיבריה. סימון: $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

גבול חלקי

גבול של תת-סדרה.

קריטריון קושי

סדרת קושי

סדרה המקיימת את קריטריון קושי.

משפטי יסוד בסדרות

משפט קיום ויחידות

אם לסדרה קיים גבול אזי הוא יחיד.

משפט התכנסות גוררת חסימות

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

משפט חסומה כפול אפיסה

אם $a_n \to 0$ והסדרה b_n חסומה אזי $a_n b_n \to 0$.

אריתמטיקה של סדרות

אם a_n, b_n שתי סדרות מתכנסות, אזי:

א) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

ב) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, כאשר לכל n $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, b_n.

הרחבת האריתמטיקה

א) **<u>כלל הסכום</u>** – אם $a_n \to \infty$ ו- $b_n > m$ (חסומה מלמטה), אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

ב) **<u>כלל המכפלה</u>** – אם $a_n \to \infty$ ו- $b_n > m > 0$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

ג) **<u>כלל המנה</u>** – **(i)** אם $|a_n| \to \infty$, אזי $\frac{1}{a_n} \to 0$

(ii) אם $a_n \to 0$ וגם $a_n > 0$ לכל n, אזי: $\frac{1}{a_n} \to \infty$

אם $a_n \to 0$ וגם $a_n < 0$ לכל n, אזי: $\frac{1}{a_n} \to -\infty$

אי-שיוויונות בין סדרות

משפט

אם: $a_n \to a$, $b_n \to b$ שתי סדרות מתכנסות, אזי:

א) אם $a < b$ אזי $a_n < b_n$ החל ממקום מסוים.

ב) אם החל ממקום מסוים $a_n \le b_n$ אזי $a \le b$.

מסקנה

תהי סדרה מתכנסת $a_n \to L$ ומספר b. אם החל ממקום מסוים $a_n \ge b$ אזי $L \ge b$

(בפרט אם $a_n \ge 0$ אזי $L \ge 0$).

משפט הסנדביץ'

אם $a_n \to L$, $c_n \to L$ והחל מ- n מסוים $a_n \le b_n \le c_n$, אזי גם $b_n \to L$.

משפט הפיצה

אם $a_n \to \infty$ והחל מ- n מסוים $a_n \le b_n$, אזי גם $b_n \to \infty$.

אם $b_n \to -\infty$ והחל מ- n מסוים $a_n \le b_n$, אזי גם $a_n \to -\infty$.

משפט אי-שיוויון הממוצעים

יהיו n מספרים ממשיים וחיוביים $a_1, a_2, \dots, a_n$, אזי:

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}$$

או במילים: **ממוצע חשבוני** $\ge$ **ממוצע הנדסי** $\ge$ **ממוצע הרמוני**

כאשר שיוויון מתקבל אם ורק אם $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

משפט צ'זארו

תהי a_n סדרה מתכנסת ויהי $S_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ הממוצע החשבוני שלה,

$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ הממוצע ההרמוני שלה,

ו- $G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ הממוצע ההנדסי שלה, אזי:

א) אם $a_n\to L$ אזי גם $S_n\to L$.

ב) אם $a_n\to L$ אזי גם $H_n\to L$, כאשר $a_n, L\neq 0$ לכל n.

ג) אם $a_n\to L$ אזי גם $G_n\to L$, כאשר $a_n>0$ לכל n.

מנה ושורש של סדרה

משפט מקשר בין מנה לשורש (משפט "ומשה")

תהי a_n סדרה חיובית. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$ אזי גם $\sqrt[n]{a_n}\to L$

מסקנות

א) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$ לכל קבוע חיובי c.

ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)}=1$ לכל פולינום חיובי $P(n)$.

ד) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ לכל סדרה חיובית וחסומה כך ש- $0<m\le a_n\le M$.

<u>מבחן המנה</u>

תהי a_n סדרה חיובית. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ אזי:

א) אם $L<1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב) אם $L>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

ג) אם $L=1$ אזי לא ניתן לדעת דבר על התכנסות/התבדרות הסדרה.

<u>מבחן השורש</u>

תהי a_n סדרה חיובית. אם $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ אזי:

א) אם $L<1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב) אם $L>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

ג) אם $L=1$ אזי לא ניתן לדעת דבר על התכנסות/התבדרות הסדרה.

<u>מונוטוניות וחסימות</u>

<u>משפט – מונוטוניות וחסימות</u>

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

כל סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה – מתכנסת לסופרמום שלה.

כל סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלטה – מתכנסת לאינפימום שלה.

<u>משפט – מונוטוניות ואי-חסימות</u>

כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

כל סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה – מתבדרת ל- $+\infty$.

כל סדרה מונוטונית יורדת ולא חסומה מלמטה – מתבדרת ל- $-\infty$.

משפטי יסוד בתתי-סדרות

משפט – הלמה של קנטור

תהיינה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. אם:

א) $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ לכל n טבעי.

ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = 0$

אזי שתיהן מתכנסות לאותו הגבול.

משפט – הלמה של קנטור – ניסוח גיאומטרי

תהי $\left\{\left[a_n, b_n\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים. אם:

א) כל קטע מכיל את הבא אחריו: $\left[a_n, b_n\right] \supseteq \left[a_{n+1}, b_{n+1}\right]$ לכל n טבעי.

ב) אורכי הקטעים שואפים לאפס: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = 0$

אזי <u>קיימת</u> נקודה <u>יחידה</u> c <u>המשותפת</u> לכל הקטעים, כך שלכל n טבעי $c \in \left[a_n, b_n\right]$.

משפט

אם סדרה מתכנסת אזי כל תת-סדרה שלה גם מתכנסת – ולאותו הגבול.

משפט

אם לסדרה קיימות שתי תתי-סדרות עם גבולות שונים, אזי לסדרה אין גבול.

משפט הירושה

תהי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ו- $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה שלה, אזי:

א) אם a_n <u>מתכנסת</u> אזי גם a_{n_k} <u>מתכנסת</u> – ולאותו הגבול.

ב) אם a_n <u>חסומה</u> (מלמעלה/מלמטה/שניהם) אזי גם a_{n_k} <u>חסומה</u>.

ג) אם a_n <u>מונוטונית</u> (עולה/יורדת/ממש) אזי גם a_{n_k} <u>מונוטונית</u>.

<u>משפט בולצאנו-ויירשטראס (B-W)</u>

א) לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

ב) לכל סדרה לא חסומה מלמעלה יש תת-סדרה המתבדרת ל- $+\infty$.

ג) לכל סדרה לא חסומה מלמטה יש תת-סדרה המתבדרת ל- $-\infty$.

<u>משפט בולצאנו-ויירשטראס (B-W) המלא</u>

לכל סדרה יש תת-סדרה המתכנסת במובן הרחב.

<u>משפט</u>

לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

<u>משפט</u>

סדרה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד.

<u>קריטריון קושי</u>

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0, כך שלכל $m,n > n_0$: $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

<u>ניסוח שקול</u>

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0, כך שלכל $n > n_0$ ולכל $p \in \mathbb{N}$: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

<u>משפט</u> – סדרה מתכנסת אמ"מ היא סדרת קושי.

הגבול המפורסם e בסדרות

משפט

תהי הסדרה: $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. אזי a_n מתכנסת ואת גבולה מסמנים באות e (כך ש- $e\approx 2.71$)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

משפט

תהי $\infty \leftarrow 0\neq a_n$, אזי:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e}$$

משפט

אם $\infty \leftarrow 0\neq a_n$ ו- $b_n\to L$ (L סופי או אינסופי), אזי: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_nb_n}=e^L}$

הגבול המפורסם סינוס בסדרות

<u>הסבר אינטואיטיבי</u>

עבור זויות מאוד קטנות ("$\alpha<<1$") מתקיים: $\sin\alpha\approx\alpha$.

ככל ש- α יותר קטנה, כך הקירוב נהיה יותר מדויק: $\frac{\sin\alpha}{\alpha}\overset{\alpha<<1}{\approx}\frac{\alpha}{\alpha}=1$.

בגבול בו $\alpha\to 0$ מתקבל "הגבול המפורסם": $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

כעת, אם ניקח למשל את הסדרה ההרמונית: $\alpha_n=\frac{1}{n}$, אזי כאשר $n\to\infty$ מתקיים ש- $\alpha_n\to 0$

ומתקבלת צורה נוספת לגבול המפורסם עבור סדרות: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}=1$

באופן כללי יותר אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1}$

האינטגרל הלא מסוים

משפטי אינטגרביליות

משפט – תנאי הכרחי לאינטגרביליות

אם $f\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע $\left[a,b\right]$ אזי היא חסומה ב- $\left[a,b\right]$.

משפט

אם $f\left(x\right)$ רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$ אזי $f\left(x\right)$ אינטגרבילית.

הכללה של המשפט

אם $f\left(x\right)$ חסומה ב- $\left[a,b\right]$ ויש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות (סליקות או קפיצה) ב-$\left[a,b\right]$ אזי $f\left(x\right)$ אינטגרבילית.

משפט

אם $f\left(x\right)$ חסומה ב- $\left[a,b\right]$ ומונוטונית אזי $f\left(x\right)$ אינטגרבילית.

משפט

אם $f\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע $\left[a,b\right]$ ו- $f\left(x\right)\geq 0$ אזי גם $\int_a^b f\left(x\right)dx\geq 0$

משפט

תהי $f\left(x\right)$ רציפה ב- $\left[a,b\right]$ ו- $f\left(x\right)\geq 0$ לכל $x\in\left[a,b\right]$.

אם $f\left(x\right)$ לא שווה לאפס באופן זהותי, אזי: $\int_a^b f\left(x\right)dx>0$

ז"א שיש לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה חיובית.

משפט

אם f אינטגרבילית ב- $\left[a,b\right]$ אזי גם $\left|f\right|$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\leq\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$$

משפט

תהי $f\left(x\right)$ אינטגרבילית ב- $\left[a,b\right]$ ונסמן: $m=\inf_{[a,b]} f\left(x\right)$, $M=\sup_{[a,b]} f\left(x\right)$, אזי:

$$m\left(b-a\right)\leq\int_a^b f\left(x\right)dx\leq M\left(b-a\right)$$

משפט הערך הממוצע האינטגרלי

אם $f\left(x\right)$ רציפה ב- $\left[a,b\right]$, אזי קיימת נקודה $c\in\left[a,b\right]$ כך ש- $\int_a^b f\left(x\right)dx=f\left(c\right)\left(b-a\right)$

שיטות אינטגרציה

אינטגרלים מיידיים (לפי שיטת "נורת זיהוי נגזרת פנימית")

לכל $n \neq -1$:
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

עבור $n = -1$:
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

הכללה

לכל $n \neq -1$:
$$\int f'(x)\left(f(x)\right)^n dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1} + c$$

עבור $n = -1$:
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

אינטגרלים של פונקציות מעריכיות

לכל $1 \neq a > 0$:
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

מקרה פרטי חשוב $a = e$:
$$\int e^x dx = e^x + c$$

הכללה

לכל $1 \neq a > 0$:
$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

מקרה פרטי חשוב $a = e$:
$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

<u>אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות הפוכות</u>

arctan x :

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

מקרה פרטי חשוב:

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2}dx = \frac{\arctan(ax+b)}{a} + c$$

הכללה:

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + c$$

arcsin x:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$$

מקרה פרטי חשוב:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}dx = \frac{\arcsin(ax+b)}{a} + c$$

הכללה:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + c$$

arccos x:

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$$

מקרה פרטי חשוב:

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}dx = \frac{\arccos(ax+b)}{a} + c$$

הכללה:

$$\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arccos(f(x)) + c$$

<u>כללי אצבע לאינטגרלים של פונקציות רציונליות</u>

נסמן ב- $P_n\left(x\right)$ פולינום כללי ממעלה n: $P_n\left(x\right)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$

ובדומה $P_{n+1}\left(x\right)$ הוא פולינום כללי ממעלה $n+1$: $P_{n+1}\left(x\right)=a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_1x+a_0$

וכך הלאה. להלן מקבץ כללי אצבע. הכללים לא מכילים פתרון של אינטגרלים אלא רק טכניקות **לפישוט האינטגרלים**, מהצורה של מנה של שני פולינומים ממעלות שונות. אם נדע כיצד לפשט את האינטגרל בכל אחד מהמקרים הבאים, נוכל להמשיך לפתור אותו בכל הטכניקות שכבר למדנו.

1) <u>אינטגרל של פולינום ממעלה n חלקי פולינום ממעלה n+1 (כלומר הפרש של 1 בדיוק לטובת המכנה)</u>

באינטגרל זה נחפש את הנגזרת של המכנה, שנמצאת במונה:

$$\int\frac{P_n\left(x\right)}{P_{n+1}\left(x\right)}dx=\ldots=\int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx=\ln\left|f\left(x\right)\right|+c$$

2) <u>אינטגרל של מספר חלקי פולינום **לא פריק** ממעלה 2</u>

אינטגרל זה מוביל ל- $\arctan x$:

$$\int\frac{c}{P_2\left(x\right)}dx=\ldots=\int\frac{1}{1+\left(ax+b\right)^2}dx=\frac{\arctan\left(ax+b\right)}{a}+c$$

3) <u>אינטגרל של מנת פולינומים מאותה המעלה:</u>

באינטגרל זה נפעל בשיטת "העתק-הדבק", נדביק את המכנה למונה + תיקון נדרש:

$$\int\frac{p_n\left(x\right)}{q_n\left(x\right)}dx=\ldots=\int\frac{\text{paste}+\text{correction}}{\text{copy}}dx=\ldots=\int1+\frac{\text{correction}}{\text{copy}}dx=\ldots$$

4) <u>אינטגרל של פולינום ממעלה n+1 ומעלה חלקי פולינום ממעלה n (הפרש של 1 ומעלה לטובת המונה)</u>

במקרה בו מעלה המונה גדולה ממעלה המכנה (ב- 1 ומעלה) נפעל בשיטת חילוק ארוך של פולינומים:

$$\int\frac{P_{n+1}\left(x\right)}{P_n\left(x\right)}dx=\ldots=\int\left(\text{Polynomial long division}\right)dx=\ldots$$

5) <u>אינטגרל של פולינום ממעלה n חלקי פולינום ממעלה n+2 ומעלה (הפרש של 2 לטובת המכנה)</u>
באינטגרל זה נפעל בשיטת פירוק לשברים חלקיים, ישנם שלושה מקרים:

א) שורש מריבוי

ב) פולינום לא פריק

ג) פולינום פריק

בשיטה זו המטרה היא לפרק אינטגרל מסובך לסכום של אינטגרלים פשוטים, כאשר אנחנו נותנים אות נפרדת (A,B,C וכו') במונה לכל גורם. כדי למצוא את הנעלמים (A,B,C וכו') נפעל בשיטת השוואת מקדמים.

א) <u>דוגמא לשורש מריבוי:</u>

בשורש מריבוי נרשום את הביטוי בסדר חזקות עולה מ- 1 ועד לחזקה המקורית וניתן אות לכל גורם:

$$\int \frac{1}{(x-17)^3}dx = \int\left(\frac{A}{(x-17)}+\frac{B}{(x-17)^2}+\frac{C}{(x-17)^3}\right)dx$$

ב) <u>דוגמא לפולינום לא פריק:</u>

ניקח את הפולינום הבא כדוגמא:

$$x^2+6x+10$$

זהו פולינום לא פריק. יהיה משתלם לנו (להמשך האינטגרל) להראות זאת ע"י השלמה לריבוע:

$$x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1 \neq 0$$

כאשר יש לנו פולינום לא פריק במכנה ממעלה n, בפירוק לשברים חלקיים נעתיק אותו ובמונה נרשום פולינום כללי מסדר n+1:

$$\int \frac{1}{(x^2+6x+10)}dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+6x+10)}dx$$

הערות

1) שימו-לב למקרה פרטי מעניין שבו הפולינום הלא פריק הוא מסדר 2 ובמונה מופיע מספר, מקרה זה יוביל לאינטגרל של arctanx כפי שראינו בנוסחאות למעלה.

2) אם הפולינום הלא פריק היה מסדר שלישי במכנה, אזי לפי שיטת פירוק לשברים חלקיים היינו רושמים במונה פולינום כללי מסדר 2 וכן הלאה.

ג) <u>דוגמא לפולינום פריק:</u>

כאשר יש לנו פולינום פריק, נפרק אותו לגורמיו וניתן אות נפרדת לכל גורם באופן הבא:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx=\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}\right)dx$$

הנה דוגמא נוספת למקרה שיכול קצת לבלבל, אבל זהו אכן פולינום פריק:

$$\int \frac{1}{x^2}dx=\int \frac{1}{(x-0)^2}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\right)dx$$

דוגמא כללית לפולינום פריק:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}dx=\int \frac{A}{(x-x_1)}dx+\int \frac{B}{(x-x_2)}dx=$$
$$=A\ln|x-x_1|+B\ln|x-x_1|+C$$

שיטת אינטגרציה בחלקים

לאינטגרל לא מסוים: $\int v'u=uv-\int u'v$

לאינטגרל מסוים: $\int_a^b v'u=uv\Big|_a^b-\int_a^b u'v$

האינטגרל המסוים

משפט

תהי פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אזי הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ רציפה ב- $[a,b]$.

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ורציפה בנקודה $x_0\in[a,b]$, אזי $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

גזירה ב- x_0 ומתקיים: $F'(x_0)=f(x_0)$

הערות: 1) במילים אחרות F היא הפונקציה הקדומה של f.

2) אם x_0 נקודת קצה של הקטע, אזי הנגזרת היא חד-צדדית.

נוסחת ניוטון-לייבניץ

תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה שלה אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

הכלל לכלל לייבניץ

תהי $f(x)$ רציפה ותהיינה $u(x),v(x)$ פונקציות גזירות.

אם: $$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

אזי: $$F'(x)=f\left(v(x)\right)v'(x)-f\left(u(x)\right)u'(x)$$